KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Matematika Umum

KELAS X

GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

KELAS X MATEMATIKA WAJIB

PENYUSUN
Tinasari Pristiyanti

SMA Negeri 3 Bogor

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Fungsi : atau pemetaan merupakan relasi khusus dari himpunan domain ke kodomain, dengan aturan setiap anggota domain dipasangkan tepat satu ke anggota kodomain

Domain : daerah asal atau himpunan yang memuat elemen pertama himpunan pasangan berurut relasi R

Kodomain : daerah himpunan kawan, atau himpunan yang memuat elemen kedua himpunan pasangan berurut relasi R

Trigonometri : Cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut

Koordinat Cartesius : didefinisikan dengan dua garis sumbu yang saling tegak lurus dan terletak pada satu bidang (bidang xy)

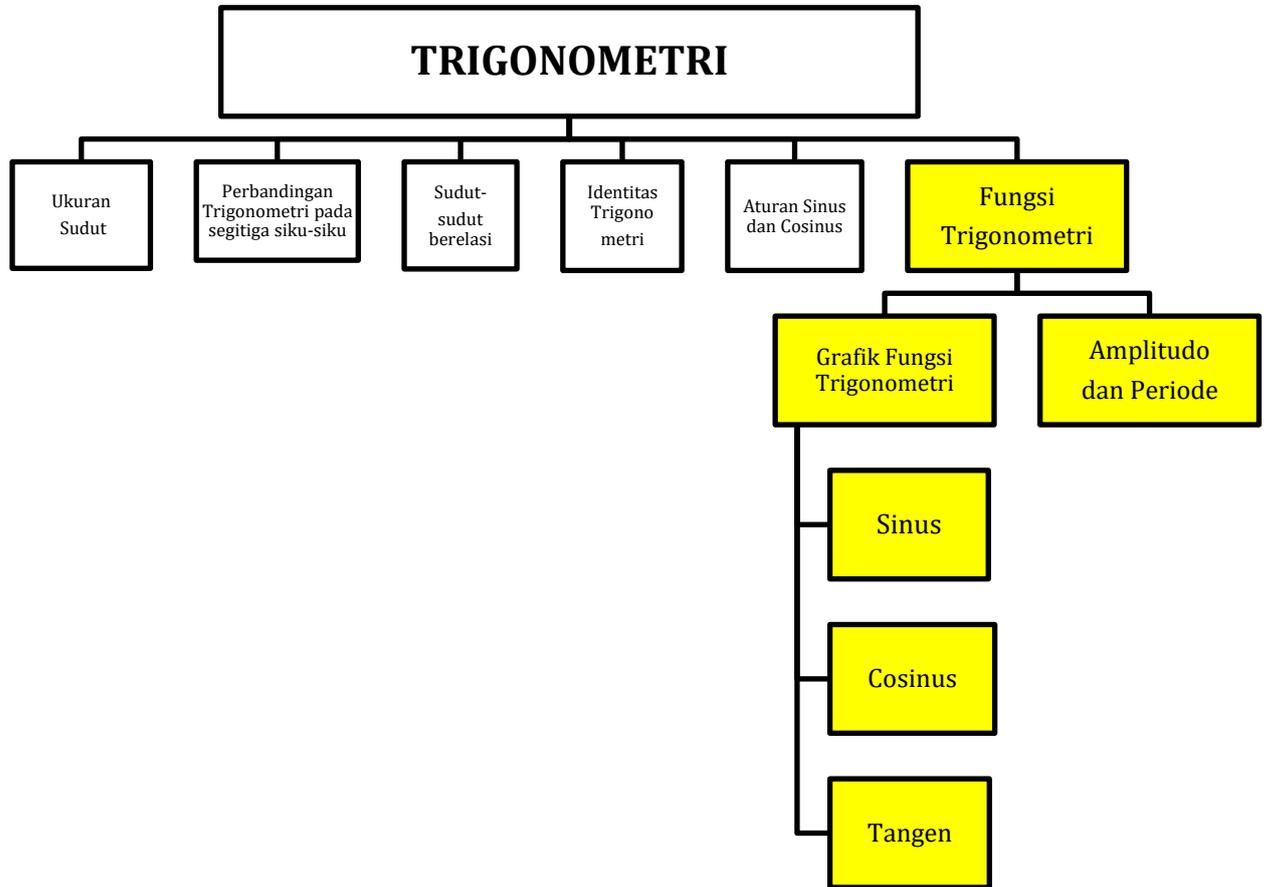
Grafik fungsi : grafik fungsi f adalah himpunan pasangan berurutan, di mana $f(x) = y$.

Sinus/Sin : perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)

Cosinus/Cos : perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)

Tangen/Tan : perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)

PETA KONSEP

TRIGONOMETRI
Ukuran Sudut
Perbandingan Trigonometri pada segitiga siku-siku
Sudut-sudut berelasi
Identitas Trigono metri
Aturan Sinus dan Cosinus
Fungsi Trigonometri
Grafik Fungsi Trigonometri
Amplitudo dan Periode
Sinus
Cosinus
Tangen

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Wajib
Kelas : X
Alokasi Waktu : 2 x 4 JP (8 JP)
Judul Modul : Fungsi Trigonometri

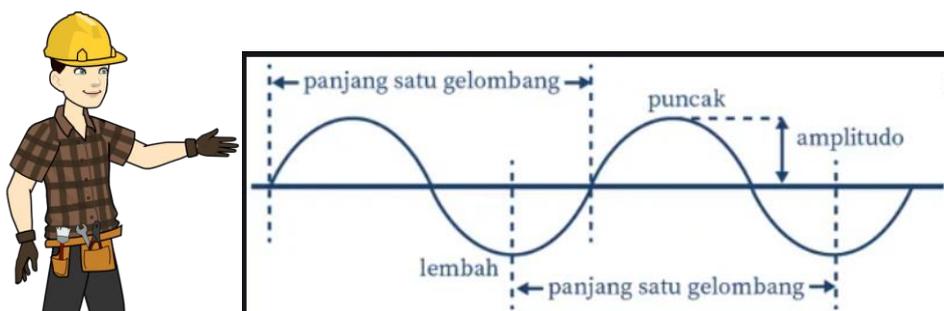
B. Kompetensi Dasar

3. 10 Menjelaskan fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan

4.10 Menganalisa perubahan grafik fungsi trigonometri akibat perubahan pada konstanta pada fungsi y = a Sin b (x+c) + d.

C. Deskripsi Singkat Materi

Ilmu Trigonometri ini tentunya memiliki penerapan dan manfaat dalam kehidupan sehari-hari kita, diantaranya pada bidang teknik sipil, arsitek bangunan, dan astronomi. Misalnya dalam ilmu teknik sipil, ilmu trigonometri ini digunakan oleh seorang Surveyor (ahli ilmu ukur tanah). Pengukuran tanah adalah salah satu cabang ilmu alam untuk menentukan posisi ruang dimendsi tiga dari suatu tempat pada permukaan bumi. Yang paling sering kita jumpai adalah dalam ilmu arsitektur bangunan, ilmu trigonometri sering digunakan untuk menentukan sudut dalam proses pembuatan suatu bangunan atau gedung-gendung tinggi. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri.

Dalam dunia Teknik sipil, kita sering melihat seorang insinyur sipil dalam menguji kekuatan bangunan mengunakan getaran dan gelombang yang hasilnya berbentuk seperti grafik dibawah ini.

Bentuk grafik seperti di atas adalah bentuk grafik yang akan kita pelajari di dalam modul ini.

Fungsi trigonometri adalah fungsi yang menghubungkan besar sudut dengan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku. Nilai fungsi trigonometri ini digunakan untuk menentukan besar sudut atau panjang sisi suatu segitiga.
Ada tiga bentuk dasar dari sebuah fungsi trigonometri yaitu fungsi sinus, fungsi cosinus dan fungsi tangen. Ketiga fungsi ini dapat dengan mudah digambarkan dengan bantuan satuan lingkaran sehingga diperoleh sebuah gambar grafik fungsi trigonometri. Grafik fungsi sinus

dan fungsi cosinus akan membentuk sebuah gelombang yang berulang dan periodik. Bentuk khas dari fungsi trigonometri ini maka dapat ditemukan karakteristik dari fungsi trigonometri jika terjadi perubahan pada amplitudo dan periodenya.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Materi bahasan pada modul ini terbagi menjadi dua kegiatan pembelajaran, yaitu:

1. Kegiatan pembelajaran pertama membahas tentang menentukan nilai sebuah fungsi trigonometri dengan menggunakan bantuan lingkaran satuan dan menggambar grafik fungsi trigonometri yaitu sinus, cosinus dan tangen dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari lingkaran satuan.
2. **Pembelajaran pertama** terdiri dari tiga bagian, yaitu:
   a. Pada bagian 1 silahkan kalian pelajari terkait dengan pembuatan grafik trigonometri sinus dengan menggunakan lingkaran satuan.
   b. Pada bagian 2 silahkan kalian pelajari terkait dengan pembuatan grafik trigonometri cosinus dengan menggunakan lingkaran satuan.
   c. Pada bagian 3 silahkan kalian pelajari terkait dengan pembuatan grafik trigonometri tangen dengan menggunakan lingkaran satuan.
3. **Pembelajaran kedua** menganalisa perubahan grafik fungsi trigonometri akibat perubahan pada konstanta pada fungsi $y = a \sin b\ (x \pm c) \pm d$, $y = a\ cos\ b\ (x \pm c) \pm d$ dan $y = a\ tan\ b\ (x \pm c) \pm d$
4. Pahami tiap kegiatan dengan tuntas, jangan melanjutkan ke kegiatan berikutnya bila masih ada yang belum dipahami.
5. Setiap kegiatan belajar dilengkapi dengan latihan yang menjadi alat ukur tingkat penguasaan kalian, setelah mempelajari modul ini.
6. Jika kalian belum menguasai 80% dari latihan pada setiap kegiatan pembelajaran, maka kalian dapat mengulanginya kembali.
7. Apabila kalian masih mengalami kesulitan dalam memahami materi yang ada dalam modul ini, silahkan berdiskusi dengan

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Fungsi trigonometri dan Menggambar grafik fungsi trigonometri

Kedua : Grafik fungsi trigonometri dalam bentuk $y = a \sin b\ (x \pm c) \pm d$, $y = a\ cos\ b$ $(x \pm c) \pm d$ dan $y = a\ tan\ b\ (x \pm c) \pm d$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
FUNGSI TRIGONOMETRI

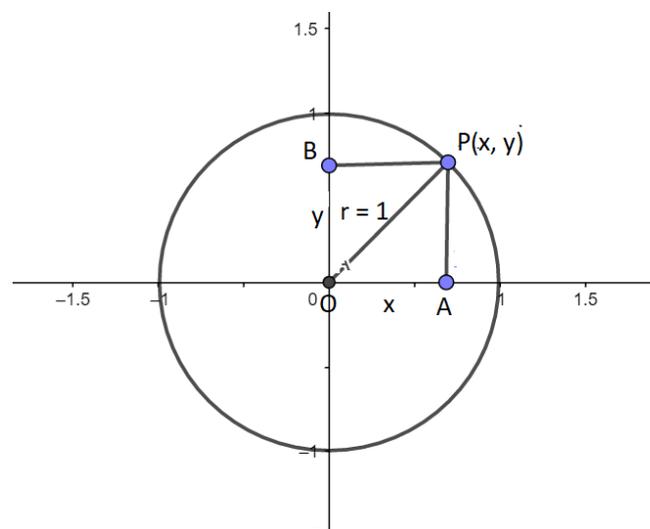
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat:

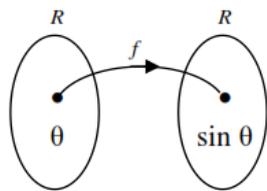
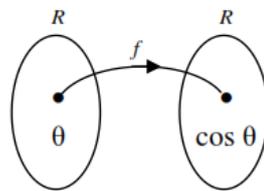
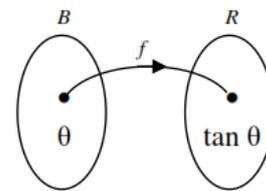
1. Mendeskripsikan fungsi trigonometri
2. Menjelaskan fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan

B. Uraian Materi

Dalam menentukan grafik fungsi trigonometri dapat digunakan dua cara, yaitu dengan menggunakan tabel sudut-sudut istimewa trigonometri dan membuat lingkaran satuan. Pada bahasan kita akan membahas cara menggambarkan fungsi trigonometri sinus, cosinus dan tangen dengan menggunakan bantuan lingkaran satuan. Pembahasan kita akan dibagi menjadi tiga bagian bagian Grafik Sinus, Grafik Cosinus dan Grafik Tangen.

Pada bahasan sebelumnya kita telah membahas terkait dengan lingkaran satuan dengan jari-jari 1 satuan. Bahwa lingkaran satuan dengan jari-jari satu adalah lingkat yang berpusat di O(0,0) dengan jari-jari sebesar 1 satuan.
Dengan menggunakan definisi di atas, maka diperoleh gambar di bawah ini:

Dengan melihat gambar di atas, maka kita ingat kembali bahwa:
$Sin\ \theta\ = \frac{AP}{OP} = \frac{y}{r},\ Cos\ \theta\ = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$, dan $Tan\ \theta\ = \frac{AP}{OA} = \frac{y}{x}$

Ingat kembali definisi fungsi adalah pemetaan yang menghubungkan semua anggota domain (daerah asal) ke tepat satu anggota kodomain (daerah hasil), maka fungsi trigonometri juga harus memenuhi ketentuan tersebut.
Pada fungsi trigonometri yang menjadi domain adalah besarnya sudut, atau pada gambar di atas adalah θ. Karena untuk setiap sudut θ hanya akan mempunyai satu nilai Sin θ, Cos θ, dan Tan θ yang merupakan anggota bilangan riil. Fungsi sinus,

cosinus dan tangen merupakan relasi dari himpunan sudut ke bilangan riil yang dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar (*i*) Gambar (*ii*) Gambar (*iii*)

Dengan:

a. gambar (i) menunjukan fungsi grafik sinus yang didefiniskan $f\,:\,\theta\ \rightarrow Sin\,\theta\,,\theta \in R$, dengan $f(\theta)\ =\ Sin\,\theta$
b. gambar (ii) menunjukan fungsi cosinus yang didefinisikan $f\,:\,\theta\ \rightarrow Cos\,\theta\,,\theta \in R$, dengan $f(\theta)\ =\ Cos\,\theta$
c. gambar (iii) adalah grafik fungsi tangen yang didefinisikan $f\,:\,\theta\ \rightarrow Tan\,\theta\,,\theta \in R$, dengan $f(\theta)\ =\ Tan\,\theta$

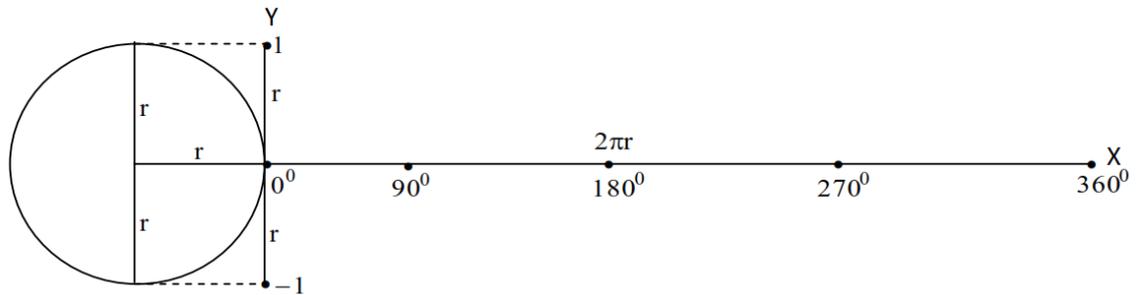
Fungsi $f(\theta)\ =\ Sin\,\theta,\ \ f(\theta)\ =\ Cos\,\theta, f(\theta)\ =\ Tan\,\theta$ kita sebut sebagai fungsi trigonometri. Adapun nilai Sin, Cos dan Tangen suatu sudut dapat bernilai positif maupun bernilai negatif atau nol tergantung letak sudutnya berada di kudrannya.

Menentukan nilai fungsi trigonometri sama seperti kita menentukan nilai fungsi yang lainnya, yaitu dengan melakukan substitusi nilai variable yang diberikan kedalam fungsinya. (Ingat kembali nilai-nilai sudut trigonometri, khususnya terkait dengan nilai sudut istimewa!)

Berikutnya akan kita bahas bagaimana menggambarkan grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan atau lingkaran dengan jari-jari satuan. Untuk memahami fungsi trigonometri secara umum, maka kita terlebih dahulu membahasa grafik fungsi trigonometri dasar yaitu grafik y = Sinx, ,, y = cos x dan y = tan x.

Grafik fungsi trigonometri digambar dalam tata koordinat Cartesius yang menggunakan dua sumbu, yakni sumbu x sebagai nilai sudut dan sumbu y sebagai nilai fungsinya. Untuk melukis kedua sumbu ini dipakai aturan tersendiri, yaitu sebagai berikut:

a. Sumbu x sebagai nilai sudut, panjangnya sama dengan keliling lingkaran (2πr). Dalam satuan derajar sumbu ini dibagi menjadi 360 bagian dengan setiap bagiannya sama dengan 1^0. Sedangkan dalam satuan radian nilai-nilai tersebut dikonversikan ke dalam π radian.
b. Sumbu y sebagai nilai fungsinya, dengan skalanya dihitung satu satuan panjang sebagai panjang jari-jari lingkaran.

Dari ilustrasi di atas, maka dapat digambarkan koordinat Cartesius yang digunakan untuk menggambar fungsi trigonometri sebagai berikut:

Dengan menggunakan koordinat Cartesius di atas, maka dibawah akan kita bahas cara untuk menggambar grafik trigonometri sederhana y = sin x, y = cos x dan y = tan x dengan menggunakan lingkaran satuan sebagai berikut:

1. **Grafik Fungsi Sinus**

   Untuk membuat grafik fungsi y = sin x, maka yang langkah-langkahnya adalah:

   a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.

   b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.

   c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

   Perhatikan gambar berikut ini:

Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle$CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Sin 0^0 = 0.

Perhatikan 2:

Besar $\angle$CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$Sin\ 30^0 = \dfrac{C'E}{AC} = \dfrac{C'E}{1}$

Maka $C'E = Sin\ 30^0 \,.\, 1 = \frac{1}{2}$.

Sehingga panjang C'E = $\frac{1}{2}$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC'_5 = C'E = \frac{1}{2}$

Perhatikan 3:

Besar $\angle CAC'_1$ = 45^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa

$Sin\ 45^0 = \frac{GC_1'}{AC} = \frac{GC_1'}{1}$

Maka $GC_1' = Sin\ 45^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Sehingga panjang $GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC_4' = GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Perhatikan 4:

Besar $\angle CAC_2' = 60^0$.

Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa

$Sin\ 60^0 = \frac{AC_2'}{AC} = \frac{C'E}{1}$

Maka $AC_2' = Sin\ 60^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sehingga panjang $AC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $AC_2' = IC_3' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Perhatikan 5:

Besar $\angle$CAV = 90^0.

Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa

$Sin\ 90 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{1}$

Maka $AV = Sin\ 90^0\ .1 = 1$

Sehingga panjang AV = 1

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang AV = AW = 1.

Berdasarkan yang kita peroleh diatas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = sin x dengan meletakkan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:

Maka grafik fungsi trigonometri y = sin x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) untuk $x = \frac{\pi}{2}$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = sin x

b) untuk $x = \frac{3\pi}{2}$ maka y = -1 adalah nilai minimum fungsi y = sin x

c) grafik fungsi y = sin x memotong sumbu y pada x = $0^0, \pi$ dan 2π

d) grafik fungsi y = sin x mempunyai periode 2π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = sin x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:

2. Grafik Fungsi Cosinus

Untuk membuat grafik fungsi y = cos x, maka yang Langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.
b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.
c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

Perhatikan gambar berikut ini:

Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar ∠CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Cos 0^0 = 1.

Perhatikan 2:

Besar ∠CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$$Cos\ 30^0 = \frac{AE}{AC'} = \frac{AE}{1}$$

Maka $AE = Cos\ 30^0\ .\ 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sehingga panjang $AE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang

$$(CE')^2 = (AC')^2 - (AE)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

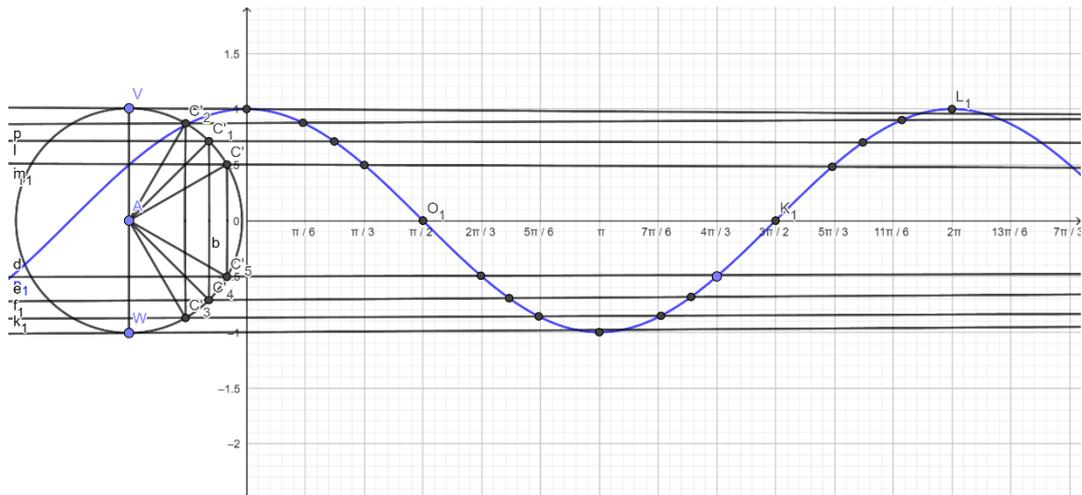
Maka $CE' = \frac{1}{2}$

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC_5' = \ C'E = \frac{1}{2}$

Perhatikan 3:
Besar $\angle CAC_1'$ = 45⁰.
Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa
$Cos\ 45^0 = \frac{AG}{AC_1'} = \frac{AG}{1}$
Maka $AG = Cos\ 45^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang
$(GC_1')^2 = \ (AC_1')^2 - (AG)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
Maka $GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $GC_4' = \ GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

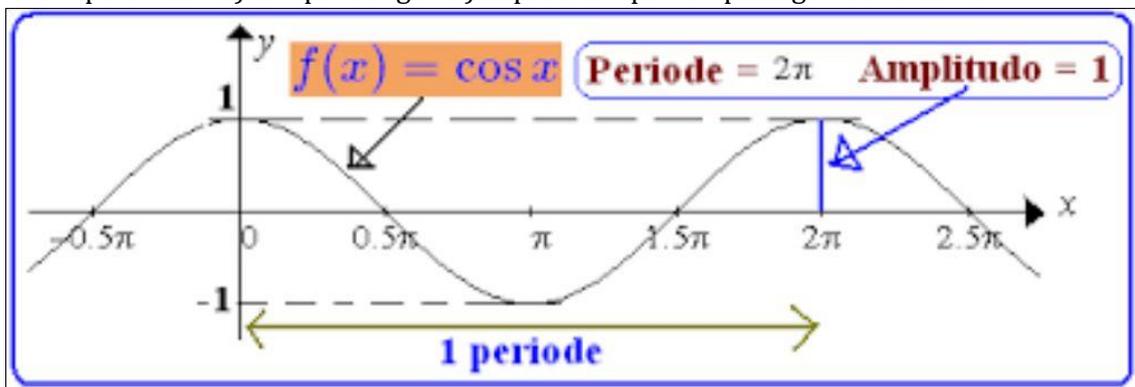
Perhatikan 4:
Besar $\angle CAC_2'$ = 60⁰.
Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa
$Cos\ 60^0 = \frac{AI}{AC_2'} = \frac{AI}{1}$
Maka $AI = Cos\ 60^0\ .1 = \frac{1}{2}$.
Sehingga panjang $AI = \frac{1}{2}$
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang
$(IC_2')^2 = \ (AC_2')^2 - (AI)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
Maka $IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $IC_3' = IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Perhatikan 5:
Besar $\angle$CAV = 90⁰.
Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa
$Cos\ 90^0 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{1}$
Maka $AV = Cos\ 90^0\ .1 = \ 0$
Sehingga panjang AV = 0
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang AV = AW = 0.

Berdasarkan yang kita peroleh diatas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = cos x dengan meletakan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:

Maka grafik fungsi trigonometri y = cos x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) untuk $x = 0$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = cos x
b) untuk $x = \pi$ maka y = -1 adalah nilai minimum fungsi y = cos x
c) untuk $x = 360^0$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = cos x
d) grafik fungsi y = cos x memotong sumbu-y pada x = $\frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$
e) grafik fungsi y = cos x mempunyai periode 2π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = cos x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:

3. Grafik Fungsi Tangen

Untuk membuat grafik fungsi y = tan x, maka yang Langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.
b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.
c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

Perhatikan gambar berikut ini:

Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle$CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Tan 0^0 = 0

Perhatikan 2:

Besar $\angle$CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$Tan\ 30^0 = \dfrac{C'E}{AE}$

Sebelumnya telah kita peroleh bahwa $C'E = \frac{1}{2}$ dan panjang $AE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, maka dipeoleh bahwa $Tan\ 30^0 = \frac{C'E}{AE} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Perhatikan 3:

Besar $\angle CAC_1'$ = 45^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa

$Tan\ 45^0 = \frac{GC_1'}{AG}$.

Dari perhitungan sebelumnya telah kira peroleh bahwa panjang $GC' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan panjang $AG = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Maka $Tan\ 45^0 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

Perhatikan 4:

Besar $\angle CAC_2'$ = 60^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa

$Tan\ 60^0 = \dfrac{IC_2'}{AI}$

Dari perhitungan sebelumnya diperoleh bahwa $IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $AI = \frac{1}{2}$. Maka diperoleh bahwa $Tan\ 60^0 = \frac{IC_2'}{AI} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Perhatikan 5:

Besar $\angle$CAV = 90^0.

Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa

$Tan\ 90^0 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{0}$, sehingga diperoleh bahwa $Tan\ 90^0 = \infty$

Berdasarkan yang kita peroleh di atas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = tan x dengan meletakan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:

Maka grafik fungsi trigonometri y = tan x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

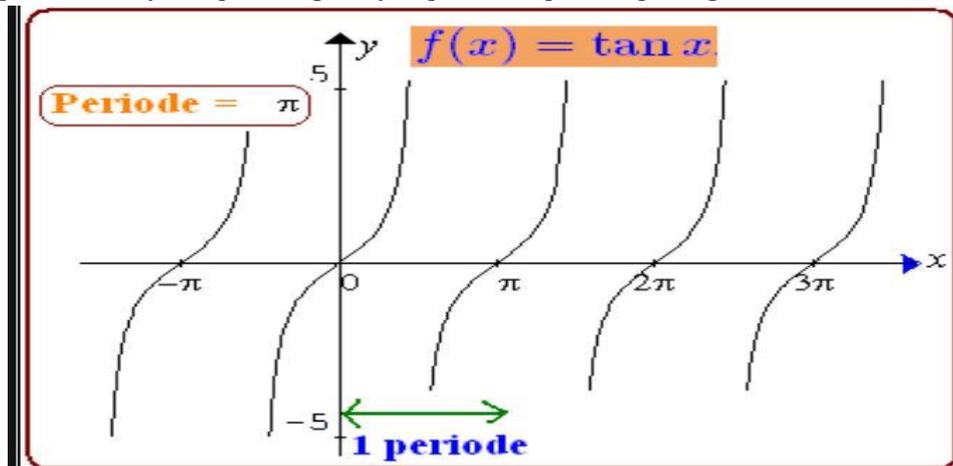
Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) grafik fungsi y = tan x memotong sumbu-y pada x = 0^0, x = π dan $x = 2\pi$

b) grafik fungsi y = tan x tidak mempunyai nilai maksimum dan tidak mempunyai nilai minimum.

c) Grafik fungsi y = tan x tidak mempunyai nilai untuk x = $\frac{\pi}{2}$ dan x = $\frac{3\pi}{2}$

d) grafik fungsi y = tan x mempunyai periode π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = tan x

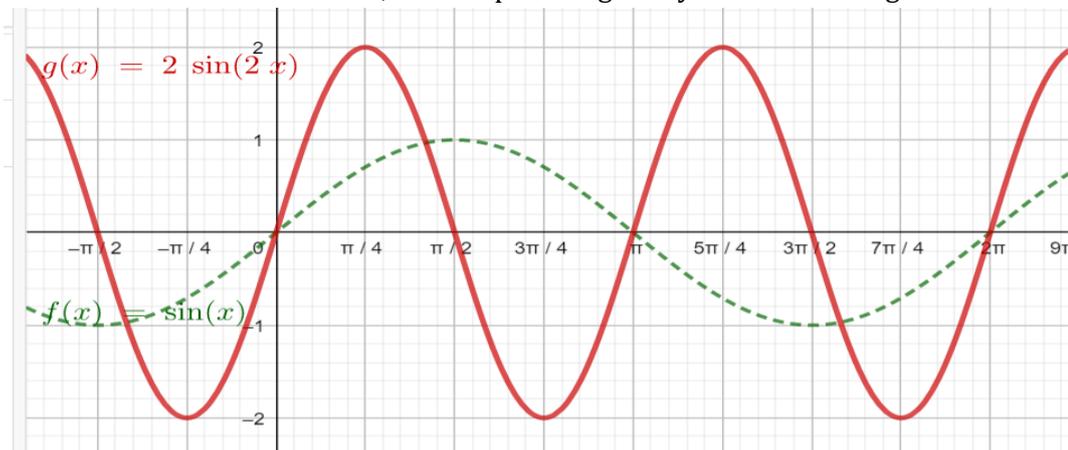
Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:

Untuk kita lebih memahami lagi terkait dengan grafik fungsi trigonometri, maka kalian lihat beberapa contoh dibawah ini.

CONTOH 1

Gambarlah grafik dari y = 2 Sin 2x

Jawaban:

Langkah-langkah untuk menggambar grafik y = 2 Sin 2x adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = sin x dan y = Sin 2x sebagai dasar
b. Nilai maksimum y = sin x adalah 1, maka nilai maksimum y = 2 sin x = 2 (1) = 2. Dan juga nilai minimum y = sin x adalah -1, maka nilai minimum y = 2 sin x = 2 (-1) = -2.
c. Peroide grafik fungsi y = 2 Sin 2x sama dengan periode fungsi y = Sin 2x, karena sudutnya sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{2} = 180^0$
d. Perhatikan kembali grafik y = sin x, dengan periode sejauh 360^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 180^0, 360^0. Maka grafik y = Sin 2x dengan periode sejauh 180^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 90^0, 180^0.
e. Grafik y = sin x mencapai maksimum di x = 90^0 dengan nilai y_{max} = 2 dan mencapai minimum di x = 270^0 dengan nilai y_{min} = -2.
f. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik y = 2 Sin 2x sebagai berikut:

CONTOH 2

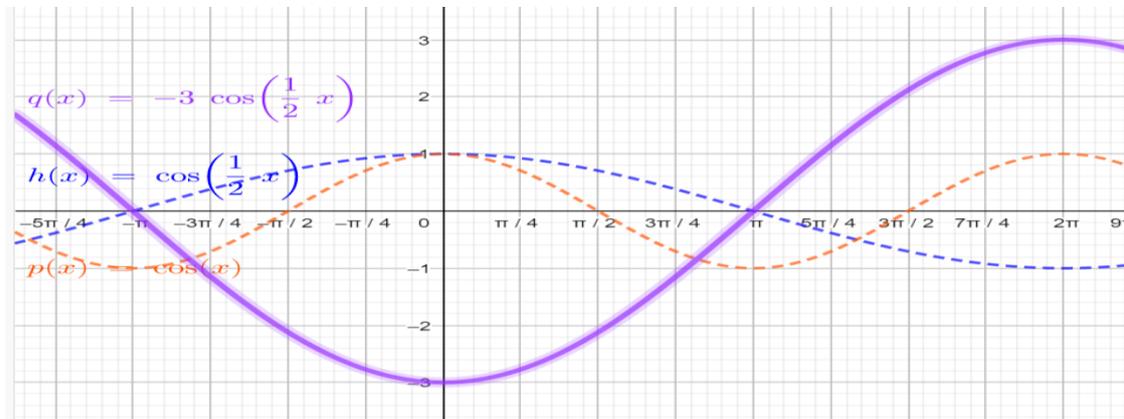
Gambarlah grafik dari $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, untuk $0 \leq x \leq 360^0$

Jawaban:

Langkah-langkah untuk menggambar grafik $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = cos x dan y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$
b. Nilai maksimum y = cos x adalah 1, maka nilai maksimum y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$= 1. Karena $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, maka nilai y_{max} = -3 (1) = -3 menjadi **nilai minimum**
c. Nilai minimum y = cos x adalah -1, maka nilai minimum y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$= -1. Karena $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, maka nilai y_{min} = -3 (-1) = 3 menjadi **nilai maksimum**
d. Periode grafik fungsi $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ sama dengan periode fungsi y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, karena sudutnya sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{\frac{1}{2}} = 720^0$

e. Perhatikan kembali grafik y = $Cos\ (x)$, dengan periode sejauh 36^0, memotong sumbu-x di titik x =90^0, 270^0. Maka grafik y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ dengan periode sejauh 720^0, memotong sumbu-x di titik x = 180^0, 540^0.

f. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ sebagai berikut:

CONTOH 3

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi y = 2 Sin 3x !

Jawaban:

Bentuk dasar dari fungsi y = 2 Sin 3x adalah y = Sin 3x.

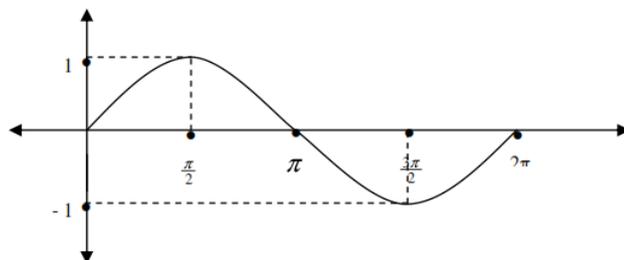
Nilai maksimum y = Sin 3x sama dengan nilai maksimum y = sin x sama dengan 1.

Maka nilai y_{max} = Sin 3x = 1. Maka nilai y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (1) = 2

Nilai minimum y = Sin 3x sama dengan nilai minimum y = sin x sama dengan -1.

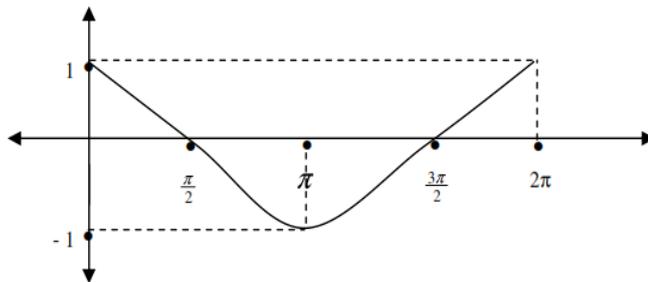
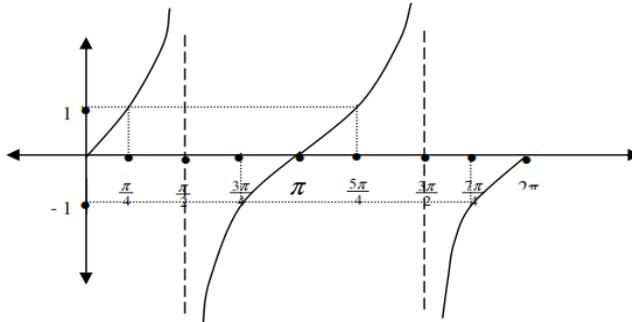
Maka nilai y_{min} = Sin 3x = -1. Maka nilai y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (-1) = -2

C. Rangkuman

1. Lingkaran satuan adalah lingkaran yang memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 1$
2. Menggambar grafik fungsi trigonometri dapat digunakan dengan dua cara, yaitu dengan tabel nilai-nilai sudut istimewa dan menggunakan lingkaran satuan
3. Perbandingan nilai trigonometri dapat terlihat pada bidang Cartesius
4. Grafik y = sin x, untuk $0^0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:

Sifat

a. *Max = 1*

b. *Min = - 1*

c. *sin (- x) = - sin x*

d. *Priode = 2π*

5. Grafik y = cos x, untuk $0^0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:

6. Grafik y = tan x, untuk $0^0 \leq x \leq \pi$ adalah:

D. Latihan Soal

Untuk lebih memahami terkait fungsi trigonometri dan menggambar fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan, maka kerjakan latihan soal dibawah ini secara mandiri. Upayakan mengerjakan secara mandiri

PILIHAN GANDA

1. Diketahui grafik fungsi y_1 = 5 sin x dan y_2 = sin 5x. Pernyataan berikut yang benar adalah ….
   A. periode y_1 = periode y_2
   B. amplitudo y_1 = amplitudo y_2
   C. periode $y_1 = \frac{1}{5}$ kali periode y_2
   D. amplitudo $y_1 = \frac{1}{5}$ kali amplitudo y_2
   E. amplitudo y_1 =5 kali amplitudo y_2

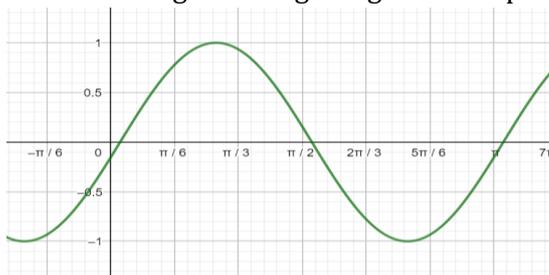
2. Jika periode suatu fungsi trigonometri adalah 360^0, maka fungsi ini adalah:
   (1) sin x
   (2) cos x
   (3) sin (x + 180^0)
   (4) tan x
   Pernyataan yang benar adalah ….
   A. (1), (2) dan (3)
   B. (1) dan (3)
   C. (2) dan (4)
   D. (4) saja
   E. Semua pernyataan benar

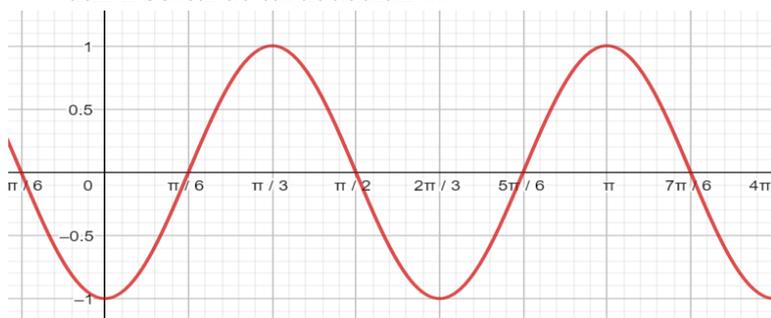
3. Sebuah grafik fungsi trigonometri mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:
   (1) Memotong sumbu-x di $x = k\pi$ dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   (2) Mempunyai asimtot tegak di $x = \frac{1}{2}k\pi$ dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   (3) Selalu berada di atas sumbu -x pada daerah $0 < x < \frac{1}{2}\pi$
   (4) Terletak dalam daerah -1 < y < 1

   Grafik fungsi trigonometri dengan ciri-ciri diatas adalah ….
   A. sin x
   B. cos x
   C. tan x
   D. sin 2x
   E. cos 2x

4. Dengan menggunakan skala dan kertas gambar yang sama, pada interval $0^0 < x < 90^0$ maka akan terlihat:
   (1) Maksimum sin x = maksimum cos x
   (2) Maksimum tan x > Maksimum cos x
   (3) Maksimum 3 sinx > Maksimum sin 3x
   (4) Maksimum 3 sin x > Maksimum 3 cos x

   Pernyataan yang bernilai benar adalah….
   A. (1), (2) dan (3) benar
   B. (1) dan (3) benar
   C. (2) dan (4) benar
   D. (4) saja
   E. Semua pernyataan benar

5. Persamaan grafik fungsi trigonometri pada gambar di bawah ini adalah …

   A. y = - cos $(2x - 30)^0$
   B. y = - cos $(2x + 30)^0$
   C. y = cos $(2x - 30)^0$
   D. y = - sin $(2x - 30)^0$
   E. y = - sin $(2x + 30)^0$

6. Persamaan grafik di bawah ini adalah y = a cos kx, dengan $0^0 \leq x \leq 120^0$, maka nilai a dan k berturut-turut adalah ….

   A. -1 dan $\frac{1}{6}$
   B. 1 dan 3
   C. 2 dan $\frac{1}{3}$
   D. -1 dan 3
   E. -1 dan $\frac{1}{6}$

7. Fungsi $y = \frac{1}{2}Cos\ x + 1$ merupakan fungsi:
   (1) Periodik dengan periode 2π
   (2) Mempunyai nilai minimum $-1\frac{1}{2}$
   (3) Mempunyai nilai maksimum $1\frac{1}{2}$
   (4) Memotong sumbu-x di $x = \frac{\pi}{2}$

   Pernyataan yang benar adalah ….
   A. (1), (2) dan (3) benar
   B. (1) dan (3) benar
   C. (2) dan (4) benar
   D. (4) saja
   E. Semua pernyataan benar

8. Gambarkan grafik fungsi y = -2 sin x, untuk 0 $\leq x \leq 2\pi$

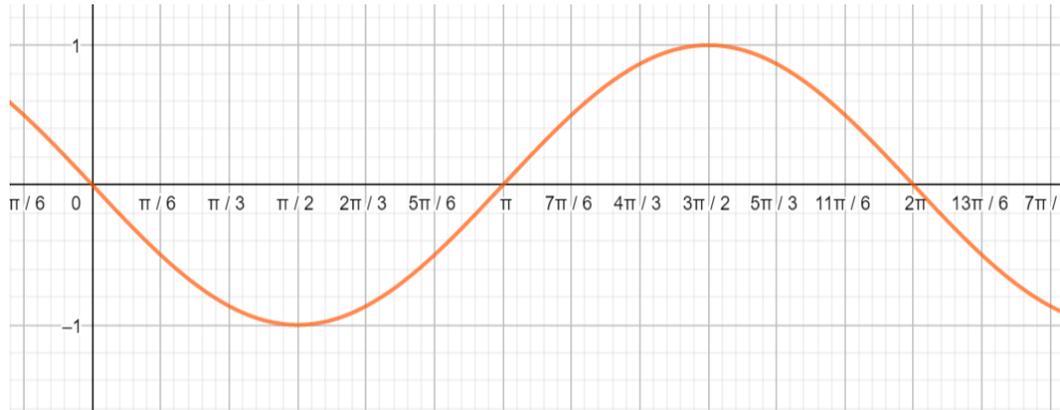
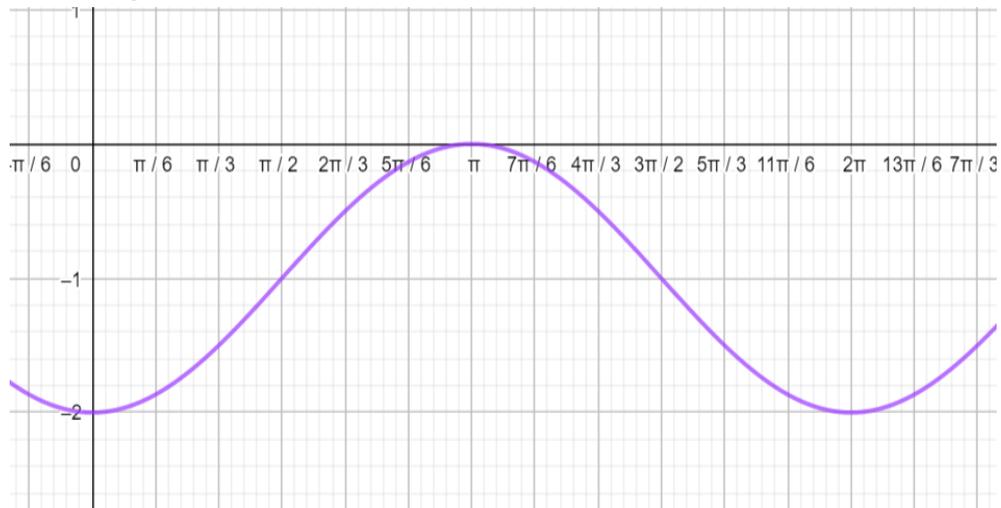
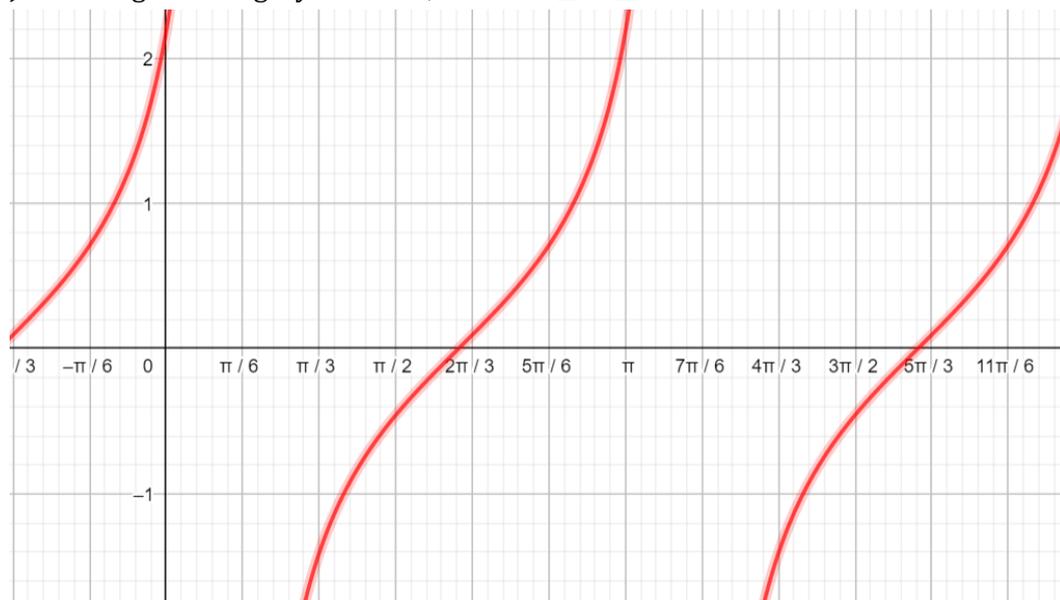
9. Gambarkan grafik fungsi y = - cos x + 1, untuk 0 $\leq x \leq 2\pi$

10. Gambarkan grafik fungsi y = tan x -2, untuk 0 $\leq x \leq 2\pi$

PEMBAHASAN

1. Jawaban: **E**
   Pembahasan:
   Bentuk umum fungsi sinus tersebut adalah $y = a\ Sin(kx)$
   Periode:
   Periode $y_1 = 5\ Sin\ x$ dengan k=1 adalah $P_1 = \frac{360^0}{1} = 360^0$,
   sedangkan periode $y_2 = Sin\ 5x$ dengan k=5 adalah $P_2 = \frac{360^0}{5} = 72^0$
   Dapat disimpulkan bahwa periode y_1 sama dengan 5 kali periode y_2.

   Amplitudo:
   Amplitudo y_1 = 5 sin x dengan a=5 adalah A_1=|a|=|5|=5, sedangkan amplitudo y_2 = Sin 5x dengan a=1 maka A_2=|a|=|1|=1.
   Dapat disimpulkan bahwa amplitudo y_1 sama dengan 5 kali amplitudo y_2.
2. Jawaban: **A**
   Pembahasan:
   Yang mempunyai periode 360^0 adalah y = sin x, y = cos x dan y = Sin (x-180^0)
3. Jawaban: **C**
   Pembahasan: Soal sudah jelas. Lihat kembali gambar grafik fungsi trigonometri y = tan x
4. Jawaban: **A**
   Pembahasan:
   Maksimum nilai y = sin x adalah 1
   Maksimum nilai y = cos x adalah 1
   Maksimum nilai y = 3 sin x = 3 (1) = 3 sedangkan maksimum nilai y = Sin 3x = 1 , maka Maksimum 3 Sin > Maksimum Sin 3x
5. Jawaban: **A**
   Pembahasan:
   Grafik di atas mempunyai nilai maksimum sama dengan 1 dan nilai minimum sama dengan -1.
   Dan grafik memotong sumbu x untuk x sama dengan 120^0.
6. Jawaban: **D**
   Pembahasan:
   Nilai maksimum dan minimum masing-masing adalah -1 dan 1, maka nilai a = 1.
   Periode grafik adalah 120^0 maka nilai k = 3.
   Maka misalkan disubstitusikan untuk x = 30^0 maka diperoleh a = -1.
7. Jawaban: **D**
   Pembahasan:
   Grafik fungsi $y = \frac{1}{2}Cos\ x + 1$ mempunyai nilai maksimum $\frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$ dan periodik diperoleh adalah 2π

8. Jawaban: grafik fungsi y = -2 sin x, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

9. Jawaban: y = - cos x + 1, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

10. Jawaban: grafik fungsi y = tan x-2, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

E. Penilaian Diri

Berilah tanda ceklist (V) pada kotak yang kalian anggap paling sesuai. Setelah mempelajari dan mengerjakan pembelajaran 1 pada modul ini, bagaimana penguasaan kalian terhadap materi-materi berikut:

No	Materi	Tidak Menguasai	Kurang Menguasai	Menguasai
1	Menggambar grafik fungsi y = sin x dengan menggunakan lingkaran satuan			
2.	Menggambar grafik fungsi y = cos x dengan menggunakan lingkaran satuan			
3.	Menggambar grafik fungsi y = tan x dengan menggunakan lingkaran satuan			
4.	Memahami grafik fungsi y = sin x			
5.	Memahami karakteristik grafik fungsi y = cos x			
6.	Memahami karakteristik grafik fungsi y = tan x			

Catatan :

1. Jika soal latihan kalian memperoleh nilai < 80% maka kembali pelajari dan ulang kembali pembelajaran 1 dari awal.
2. Jika dari ceklist yang kalian buat < 75% tidak atau kurang dikuasai, maka kembali pahami dan ulang kembali kegiatan pembelajaran 1 dari awal.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI BENTUK Y = A Sin b (X ±C) ±K

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran kedua ini diharapkan siswa dapat:

1. Menjelaskan perubahan grafik fungsi trigonometri yang diakibatkan oleh bentuk fungsi y = a Sin b (x±c) ± d.
2. Mengidentifikasi grafik fungsi trigonometri y = a Sin b (x±c) ± d.

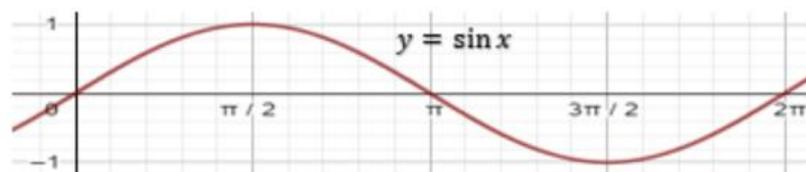
B. Uraian Materi

Sebagaimana telah diperoleh pada pembelajaran sebelumnya, bahwa fungsi trigonometri sinus, cosinus dan tangen adalah bentuk fungsi yang periodik. Fungsi periodic adalah fungsi yang sifatnya berulang-ulang secara teratur. Karena bersifat periodic, berarti ada periodenya.

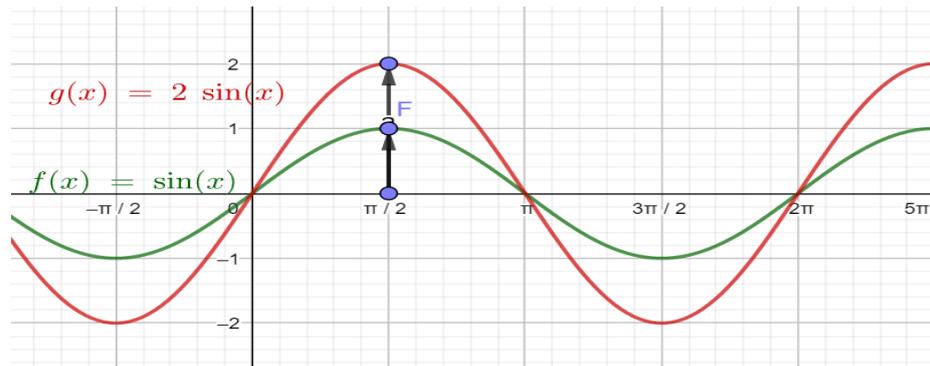
Periode bisa kita sebut juga sebagai siklus yaitu pengulanagn hal yang sama setelah suatu selang tertentu. Fungsi y = sin x akan membentuk siklus/periode setiap 360^0. Hal ini bermakna bahwa setelah x mencapai 360^0, maka grafik fungsi y = sin x akan mengulang kembali ke awal.

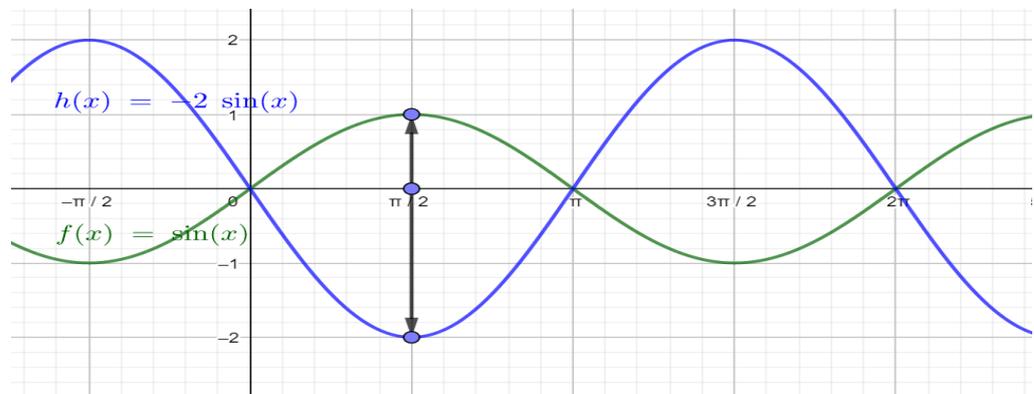
Supaya lebih jelas kalian bisa melihat dari ilustrasi berikut ini!

1. Grafik Fungsi Sinus

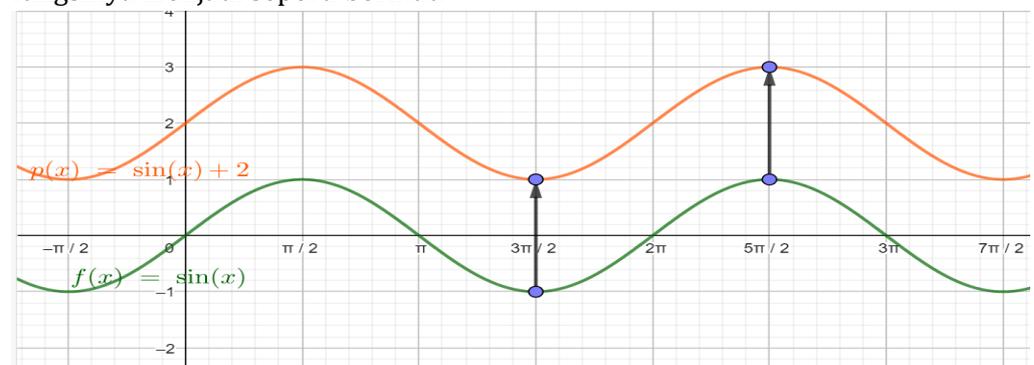
   Ingat kembali bentuk fungsi y = sin x, untuk $0^0 \leq x \leq 360^0$ sebagai berikut:

   Fungsi y = sin x mempunyai nilai maksimum di y = 1 dan nilai minimum di y = -1. Nilai maksimum atau nilai minimum untuk y = 1, maka y = 1 disebut juga sebagai amplitude dari grafik fungsi y = sin x.

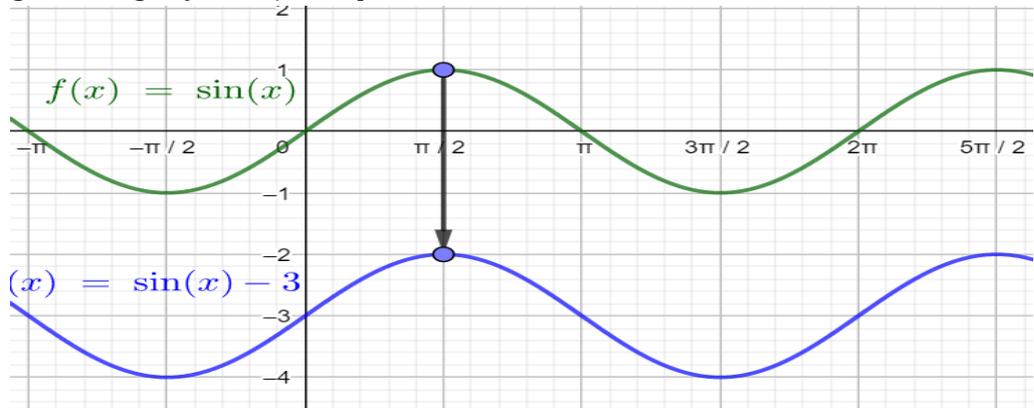
   Perhatikan pula bahwa grafik fungsi y = sin x mempunyai periode sejauh 360^0 untuk membentuk satu gelombang.

   a. Misalkan fungsi $y_2 = 2y_1$ atau $y_2 = 2\,Sin\,x$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsi nya menjadi seperti berikut:

Berdasarkan grafik di atas, perhatikan bahwa nilai maksimum y_2 = 2 sin x menjadi sama dengan 2 dan nilai minimum menjadi -2. Sedangkan periode dari y_2 = 2 sin x tetap sama dengan 360^0.

b. Misalkan fungsi $y_3 = -2y_1$ atau $y_3 = -2\ sin\ x$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsi nya menjadi seperti berikut:

Berdasarkan grafik diatas perhatikan bahwa nilai maksimum y_3 = -2 sin x menjadi sama dengan 2 dan nilai minimum menjadi -2. Sedangkan periode dari y_3 = -2 sin x tetap sama dengan 360^0.

Berdasarkan a) dan b) maka diperoleh bahwa secara umum jika diberikan fungsi trigonometri y = k Sin x, maka nilai maksimum y = k dan nilai minimum = -k

c. Misalkan fungsi $y_4 = y_1 + 2$ atau $y_4 = sin\ x + 2$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:

Berdasarkan grafik fungsi trigonometri di atas, maka diperoleh bahwa nilai maksimum y_4 = 3 atau nilai maksimum y_4 = nilai maksimum y_1 + 2 = 1 + 2 = 3. Sedangkan nilai minimum y_4 = 1 atau nilai minimum y_4 = nilai minimum y_1+2=-1

d. Misalkan fungsi $y_5 = y_1 - 3$ atau $y_4 = Sin\, x - 2,\ 0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:

Berdasarkan grafik fungsi trigonometri di atas, maka diperoleh bahwa nilai maksimum y_5 = -2 atau nilai maksimum y_5 = nilai maksimum y_1 -3 = 1 -3 = -2. Sedangkan nilai minimum y_5 = -4 atau nilai minimum y_5 = nilai minimum y_1 – 3 = -1 - 3 = - 4.

Berdasarkan ilustrasi pada c) dan d) maka diperoleh jika y = sin x + c, maka y mempunyai nilai maksimum sama dengan 1 + c dan y mempunyai nilai minimum 1 – c.

e. Misalkan fungsi $y_6 = \text{Sin}\left(\text{x} - \frac{\pi}{6}\right),\ 0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:

Berdasarkan gambar di atas, maka dapat diperoleh bahwa fungsi y = sin x memotong sumbu -x dititik x = $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Sedangkan pada grafik y = Sin (x - 30^0) diperoleh bahwa titik potong sumbu-x memenuhi untuk y = 0, maka diperoleh untuk:

i. Sin (x - 30^0) = 0 atau x - 30^0 = 0 atau x = 30^0, 150^0
ii. Sin (x - 30^0) = 0 atau x - 30^0 = 180^0 atau x = 210^0

f. Misalkan fungsi $y_7 = \text{Sin}\left(\text{x} + \frac{\pi}{6}\right)$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:

Berdasarkan gambar di atas, maka dapat diperoleh bahwa fungsi y = sin x memotong sumbu -x dititik x = $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Sedangkan pada grafik y = Sin (x + 30^0) diperoleh bahwa titik potong sumbu-x memenuhi untuk y = 0, maka diperoleh untuk:

i. Sin (x + 30^0) = 0 atau x + 30^0 = 0 atau x = - 30^0 ,150^0

ii. Sin (x + 30^0) = 0 atau x + 30^0 = 180^0 atau x = 210^0

Berdasarkan ilustrasi yang ada di e) dan f), jika grafik fungsi trigonometri bertambah sejauh α^0 atau Sin (x + 30^0) maka diperoleh grafiknya dapat diperoleh dari grafik fungsi y = sin x yang digeser sejauh α^0 ke arah kanan sepanjang sumbu-x.

Sedangkan grafik fungsi trigonometri berkurang sejauh α^0 atau Sin (x - 30^0) maka diperoleh grafiknya dapat diperoleh dari grafik fungsi y = sin x yang digeser sejauh α^0 ke arah kiri sepanjang sumbu-x

Berdasarkan bahasan di atas, maka dapat kita buat kesimpulan secara umum bahwa grafik fungsi sinus yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$
b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$
c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
i. Grafik fungsi y = $= -k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Dengan cara yang sama seperti di atas, maka untuk mendapatkan ilustrasi terkait dengan grafik fungsi cosinus yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$
b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$
c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
i. Grafik fungsi y = $= -k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Sedangkan untuk grafik tangen untuk mendapatkan ilustrasi terkait dengan grafik fungsi tangen yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = \infty$
b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -\infty$
c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
d. Periode fungsi adalah $\frac{180^0}{a}$ atau $\frac{\pi}{a}$
e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
i. Grafik fungsi y = $= -k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Untuk lebih memahami pembahasan di atas, perhatikan contoh-contoh soal dibawah ini.

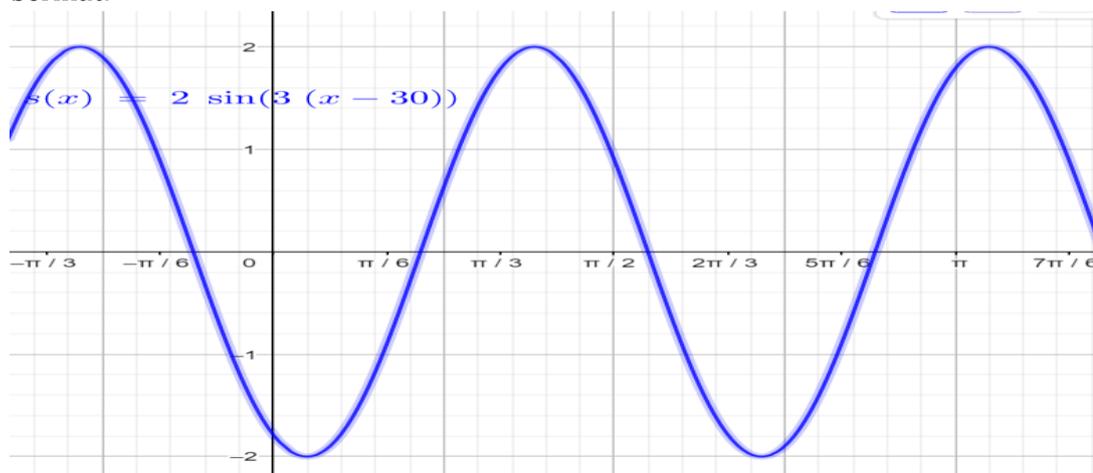
CONTOH 1

Gambarkan grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) untuk $0 \leq x \leq 180^0$

Jawaban:

Langkah - langkah untuk menggambar grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = sin x dan y = 2 Sin 3x sebagai dasar
b. Nilai maksimum y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (1) = 2 maka y_{max} = 2 Sin 3(x - 30^0) = 2 dan nilai y_{min} = 2 Sin 3x = 2 (-1) = -2 maka y_{min} =2 Sin 3(x - 30^0) = -2
c. Karena fungsi y = 2 Sin 3x dan y = 2 Sin 3(x - 30^0) mempunyai sudut yang sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{3} = 120^0$
d. Perhatikan kembali grafik y = sin x, dengan periode sejauh 360^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 180^0, 360^0. Maka grafik y = Sin 3x dengan periode sejauh 120^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 60^0, 120^0.

e. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) sebagai berikut:

CONTOH 2

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Jawaban:

Bentuk dasar dari fungsi trigonometri $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ adalah bentuk $y = Cos\ x$.

a. Nilai y = cos x mempunyai nilai maksimum sama dengan 1. Maka diperoleh bahwa $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ mempunyai nilai y= $-\frac{3}{2}\ (1) = -\frac{3}{2}$.

Maka bentuk $y = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$ → ini merupakan nilai minimum

b. Nilai y = cos x mempunyai nilai minimum sama dengan -1. Maka diperoleh bahwa $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ mempunyai nilai y= $-\frac{3}{2}\ (-1) = \frac{3}{2}$.

Maka bentuk $y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ → ini merupakan nilai maksimum

C. Rangkuman

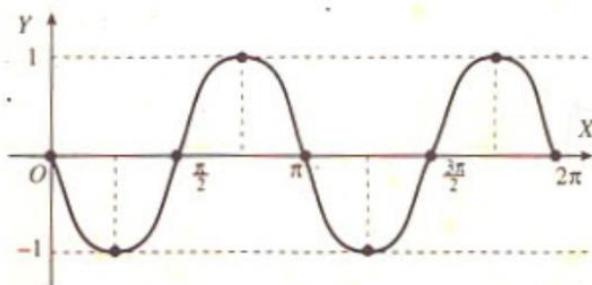
Berdasarkan bahasan di atas, maka dapat kita simpulkan sebagai berikut:

1. **Bentuk $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh**:
   a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$
   b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$
   c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
   d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
   e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
   f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
   g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
   h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
   i. Grafik fungsi y = $= -k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

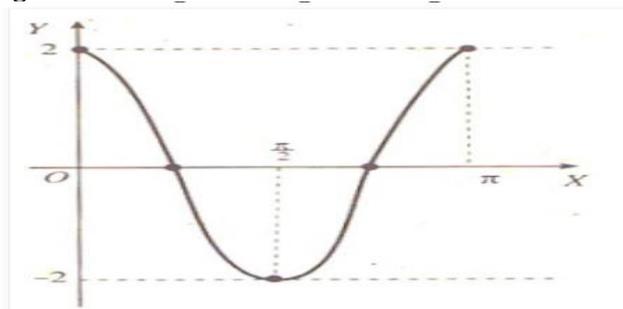
2. **Bentuk $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:**
   a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$
   b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$
   c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
   d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
   e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
   f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
   g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
   h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
   i. Grafik fungsi y = $= -k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

3. **Bentuk $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:**
   a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = \infty$
   b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -\infty$
   c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
   d. Periode fungsi adalah $\frac{180^0}{a}$ atau $\frac{\pi}{a}$
   e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
   f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
   g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
   h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
   i. Grafik fungsi y = $= -k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

D. Latihan Soal

1. Grafik di bawah ini persamaannya adalah ….

   A. y = sin x
   B. y = sin 2x
   C. y = sin (-x)
   D. y = sin (-2x)
   E. $y = \frac{1}{2}\cos 2x$

2. Persamaan grafik fungsi untuk gambar dibawah ini adalah ….

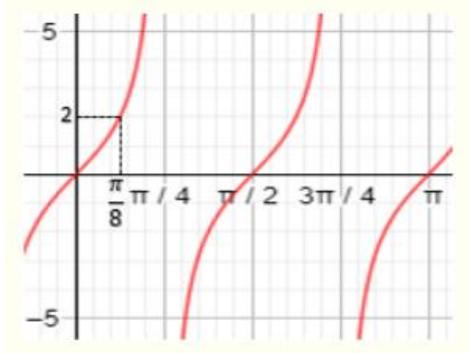
   A. $y = \cos \frac{1}{2}x$
   B. $y = 2\cos \frac{1}{2}x$
   C. $y = \cos x$
   D. $y = 2\cos x$
   E. $y = 2\cos 2x$

3. Nilai maksimum dan minimum dari fungsi $y = 5\ Cos\ 3x$ adalah ....
   A. 3 dan -3
   B. 4 dan -5
   C. 5 dan -5
   D. 6 dan -3
   E. 7 dan 5

4. Nilai maksimum dan nilai minumum dari fungsi $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$ adalah ....
   A. -2 dan -3
   B. 2 dan -2
   C. -3 dan -5
   D. 3 dan -3
   E. 5 dan -5

5. Nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi $y = -3\ Sin\ (2x - 60^0\ ) - 5$ adalah ....
   A. -3 dan -5
   B. -2 dan -8
   C. 0 dan -5
   D. 2 dan -3
   E. 3 dan -7

6. Jika $0^0 \leq x \leq 180^0$ maka fungsi $y = 3\ Sin\ (2x - 30^0)$ mempunyai nilai maksimum di titik ....
   A. $(30^0, 3)$
   B. $(45^0, 3)$
   C. $(60^0, 3)$
   D. $(75^0, 3)$
   E. $(90^0, 3)$

7. Periode dari fungsi $y = 2\ Sin\ (3x - 30^0)$ adalah ....
   A. 90^0
   B. 120^0
   C. 150^0
   D. 180^0
   E. 360^0

8. Persamaan dari grafik di bawah ini adalah ....

   A. y = tan 2x
   B. y = 2 tan 2x
   C. $y = tan\ \frac{1}{2}x$
   D. y = -2 tan x
   E. y = 2 tan x

PEMBAHASAN

1. Jawaban: **D**

   Pembahasan:
   Grafik memotong sumbu-x dititik x = 0^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0, maka fungsi mempunyai periode sama dengan 180^0
   Grafik mempunyai nilai maksimum sama dengan 1 dan mempunyai nilai minimum sama dengan -1
   Maka grafik di atas yang benar adalah y = Sin (-2x)

2. Jawaban: **B**

   Pembahasan:
   Grafik memotong sumbu-x dititik x =45^0,135^0 maka fungsi mempunyai periode sama dengan 180^0
   Grafik mempunyai nilai maksimum sama dengan 2 dan mempunyai nilai minimum sama dengan -2
   Maka grafik di atas yang benar adalah $y = 2\ Cos\ \frac{1}{2}x$

3. Jawaban: **C**

   Pembahasan:
   Bentuk dasar dari $y = 5\ Cos\ 3x$ adalah y = Cos 3x.
   Nilai maksimum y = Cos 3x adalah 1, maka nilai maksimum $y = 5\ Cos\ 3x = 5\ (1) = 5$
   Nilai minimum y = Cos 3x adalah -1, maka nilai minimum $y = 5\ Cos\ 3x = 5\ (-1) = -5$

4. Jawaban: **D**

   Pembahasan:
   Bentuk dasar dari $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$ adalah $y = -3\ Cos\ 2x$
   Nilai maksimum y = cos 2x adalah 1, maka $y = -3\ Cos\ 2x = -3\ (1) = -3$ → ini akan menjadi nilai minimum fungsi $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$
   Nilai minimum y = cos 2x adalah -1, maka $y = -3\ Cos\ 2x = -3\ (-1) = 3$ → ini akan menjadi nilai maksimum fungsi $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$

5. Jawaban: **B**

   Pembahasan:
   Bentuk dasar dari $y = -3\ cos\ 2(x + 30^0)$ adalah $y = -3\ Cos\ 2x$
   Nilai maksimum y = cos 2x adalah 1, maka $y = -3\ Cos\ 2x = -3\ (1) = -3$ → ini akan menjadi nilai minimum fungsi $y = -3\ cos\ 2(x + 30^0)$
   Nilai minimum y = cos 2x adalah -1, maka $y = -3\ cos\ 2x = -3\ (-1) = 3$ → ini akan menjadi nilai maksimum fungsi $y = -3\ cos\ 2(x + 30^0)$

6. Jawaban: **C**

   Pembahasan:
   Grafik fungsi $y = 3\ sin\ (2x - 30^0)$ mempunyai nilai maksimum sama dengan 3, maka $y = 3\ sin\ (2x - 30^0)$ = 3.
   Maka $sin\ (2x - 30^0) = 1$. Grafik fungsi Sinus mempunyai nilai 1 pada x = 90^0, maka $(2x - 30^0) = 90^0$ → 2x = 120^0 → x = 60^0

7. Jawaban: **B**

   Pembahasan:

   Bentuk dasar dari fungsi $y = 2\ sin\ (3x - 30^0)$ adalah y = 2 sin 3x.

   Fungsi y = 2 sin 3x mempunyai periode sama dengan $\frac{360^0}{3} = 120^0$

8 Jawaban: **B**

   Pembahasan:

   Periode grafik = 90^0 maka diperoleh y = k tan 2x

   Lakukan substitusi untuk $x = \frac{\pi}{8}$, maka diperoleh bahwa nilai y = 2. Substitusikan nilai ini ke bentuk y = k tan 2x, maka diperoleh k = 2.

   Maka diperoleh fungsi sama dengan y = 2 tan 2x

E. Penilaian Diri

Berilah tanda ceklist (V) pada kotak yang kalian anggap paling sesuai. Setelah mempelajari dan mengerjakan pembelajaran 1 pada modul ini, bagaimana penguasaan kalian terhadap materi-materi berikut:

No	Materi	Tidak Menguasai	Kurang Menguasai	Menguasai
1	Mampu menggambar grafik fungsi $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
2.	Mampu menggambar grafik fungsi $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
3.	Mampu menggambar grafik fungsi $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
4.	Menentukan nilai maksimum/ minimum bentuk $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
5.	Menentukan nilai maksimum/ minimum bentuk $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
6.	Menentukan nilai maksimum/ minimum bentuk $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
7.	Menentukan periode fungsi $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
8.	Menentukan periode fungsi $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
9.	Menentukan periode fungsi $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$			

Catatan :

1. Jika soal latihan kalian memperoleh nilai < 80% maka kembali pelajari dan ulang kembali pembelajaran 1 dari awal.
2. Jika dari ceklist yang kalian buat < 75% tidak atau kurang dikuasai, maka kembali pahami dan ulang kembali kegiatan pembelajaran 1 dari awal.

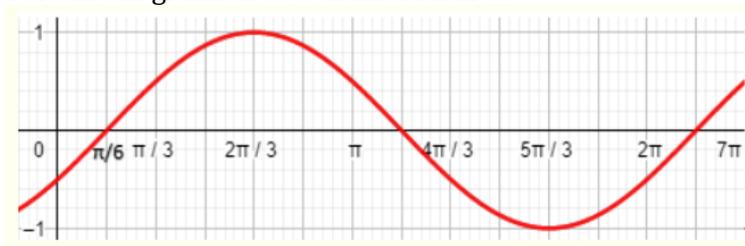
EVALUASI

Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Nilai maksimum fungsi y = 2 Sin 3x + 3 adalah ….
   A. -2
   B. 0
   C. 2
   D. 3
   E. 5

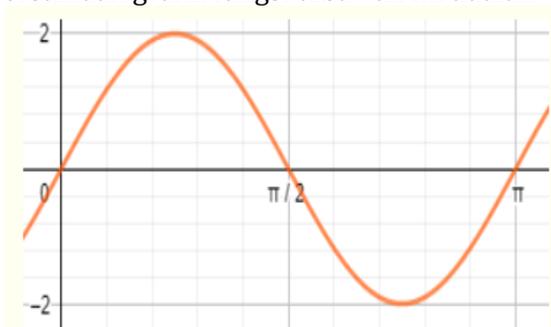
2. Nilai minimum dari fungsi $y = -4\ Cos\ 3(x + 30^0) + 2$ adalah ….
   A. -2
   B. 0
   C. 2
   D. 1
   E. 4

3. Jika $0^0 \leq x \leq 180^0$, maka fungsi $y = -3\ Cos\ 2x$ akan minimum untuk x sama dengan ….
   A. 0^0 dan 180^0
   B. 30^0 dan 120^0
   C. 45^0 dan 135^0
   D. 60^0 dan 150^0
   E. 90^0 dan 180^0

4. Persamaan grafik di bawah ini adalah ….

   A. y = sin x
   B. y = cos (x - 30^0)
   C. y = sin (x - 30^0)
   D. y = cos (x + 30^0)
   E. y = sin (x + 30^0)

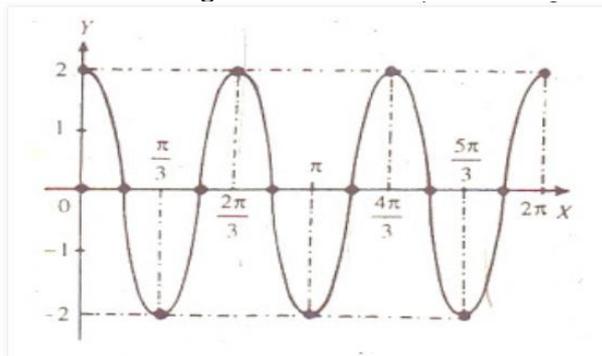
5. Persamaan grafik fungsi dibawah ini adalah

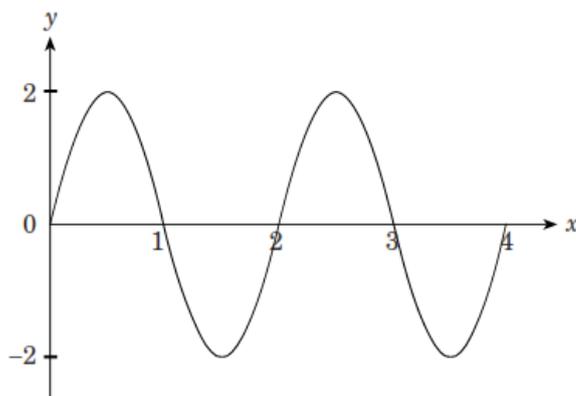
   A.

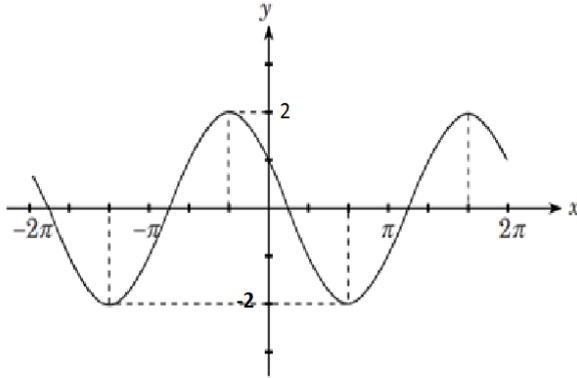
   A. y = sin x
   B. y = -2 sin 2x
   C. $y = 2\ sin\ \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$
   D. $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$
   E. $y = 2\ cos\ \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

6. Persamaan dari grafik dibawah ini adalah .....

A. $y = Sin\ 2(x - 30^0) + 1$
B. $y = Sin\ (2x - 30^0) + 1$
C. $y = Cos\ 2(x - 30^0) + 1$
D. $y = Cos\ (2x - 30^0) + 1$
E. $y = 2Sin\ (x + 30^0) + 1$

7. Nilai maksimum dari fungsi $y = -\frac{3}{8} Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ adalah ....
   A. $\frac{3}{8}$
   B. $\frac{5}{8}$
   C. $\frac{6}{8}$
   D. $\frac{11}{8}$
   E. $\frac{13}{8}$

8. Perhatikan grafik dibawah ini!

Periode grafik fungsi disamping adalah ...
   A. 30^0
   B. 60^0
   C. 90^0
   D. 120^0
   E. 180^0

9. Perhatikan grafik dibawah ini!

Jika grafik di atas berbentuk y = A Sin kx, maka nilai A dan k yang sesuai adalah ....
   A. A = -2 dan k = π
   B. A = -2 dan k = 2
   C. A = 2 dan k = π
   D. A = 2 dan k = 2π
   E. A = 2 dan k = 2

10. Persamaan grafik fungsi pada gambar di bawah adalah ….

A. $y = 2\,Cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$
B. $y = 2\,Cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$
C. $y = 2\,Cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$
D. $y = 2\,Cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
E. $y = 2\,Cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$

11. Gambarkan grafik fungsi $y = \frac{1}{2}\,Sin\,(x - 45)$

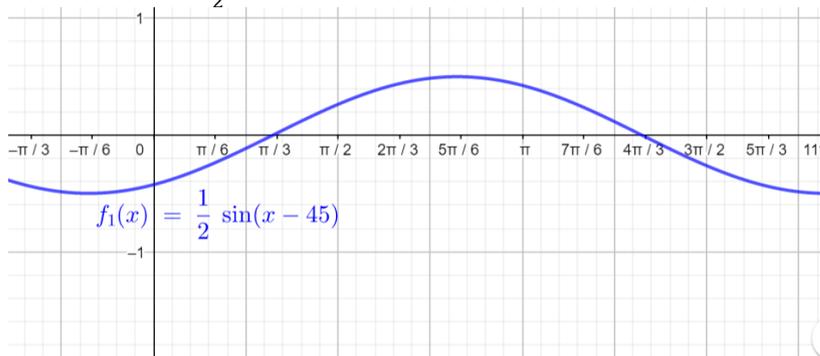
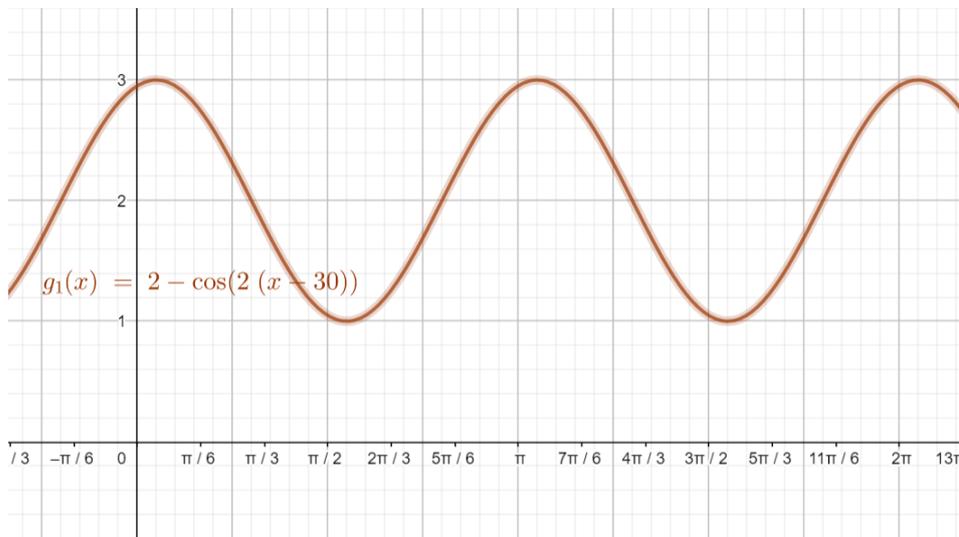
12. Gambarkan grafik fungsi $y = 2 - Cos\,2(x - 30)$

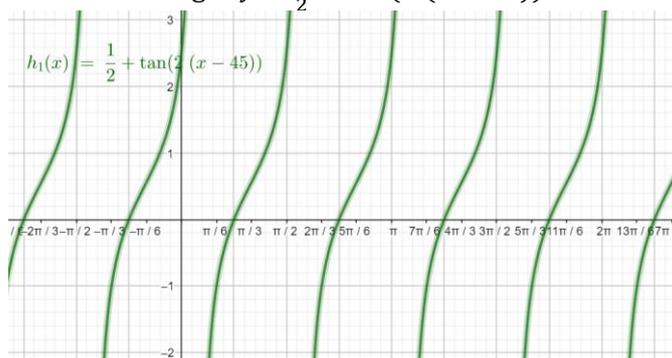
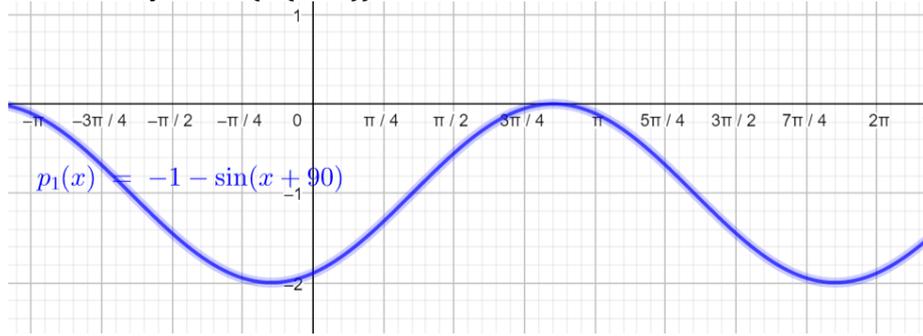
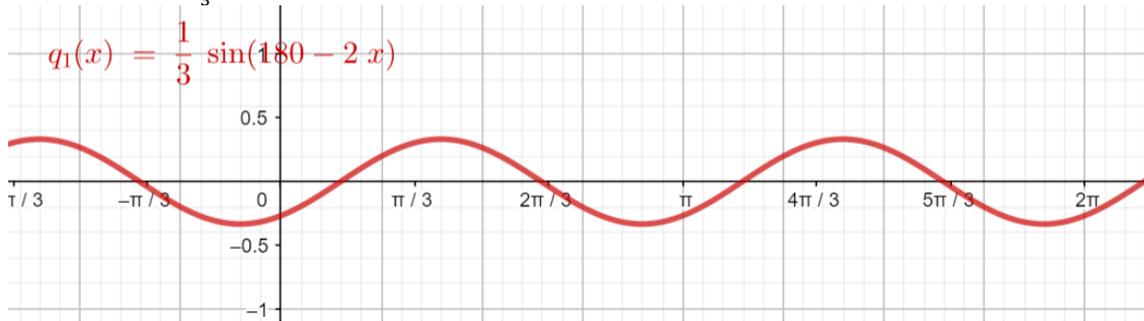
13. Gambarkan grafik fungsi $y = \frac{1}{2} + tan(2\,(x - 45))$

14. Gambarkan grafik fungsi $y = 2 - cos(2\,(x - 30))$

15. Gambarkan grafik fungsi $y = \frac{1}{3}\,\left(Sin(180 - 2x)\right)$

Kunci Jawaban.

1. E
2. E
3. A
4. C
5. D
6. A
7. D
8. D
9. E
10. D
11. Grafik $y = \frac{1}{2}\, Sin\,(x - 45)$

12. grafik fungsi $y = 2 - Cos\,2(x - 30)$

13. Grafik fungsi $y = \frac{1}{2} + tan(2\,(x - 45))$

14. Grafik y=2-cos(2 (x-30))

15. Grafik $y = \frac{1}{3}\left(Sin(180 - 2x)\right)$

DAFTAR PUSTAKA

dkk, Bornok Sinaga. 2017. Matematika Wajib SMA/MA Kelas X . Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Herlin, Bob Foster. 2015. Soal dan Pembahasan Matematika. Jakarta: Erlangga.

2018. "https://www.maretong.com/2018/12/fungsi-trigonometri.html." https://www.maretong.com/2018/12/fungsi-trigonometri.html. Desember 19. Accessed September 16, 2020.

maya, Media. 2020. "https://mediamaya26.blogspot.com/2020/07/modul-fungsitrigonometri.html." https://mediamaya26.blogspot.com/2020/07/modul-fungsitrigonometri.html. Januari 19. Accessed September 15, 2020.

Research, Tim Quantum. 2020. Super Master Pelajaran SMA/MA Kelas X Semester 1 dan 2 Saintek. Bandung: Yrama Widya.